

## Übungsaufgaben 03 Vorlesung Biometrie I

Name: \_\_\_\_\_

Abgabe/Vorbereiten für: MO 15.12.2008

### Aufgabe1.

Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige, stetige, reelle Zufallsvariable mit Dichten  $f_X(x)dx$  und  $f_Y(y)dy$  und entsprechenden Verteilungsfunktionen  $F_X$  und  $F_Y$ .

Oft interessiert man sich für die sogenannte **Proversions-Wahrscheinlichkeit**  $\text{pr}(X>Y)$

a) Versuchen Sie eine allgemeine Formel für  $\text{pr}(X>Y)$  aufzustellen.

b) Wie groß ist  $\text{pr}(X>Y)$  falls  $X$  und  $Y$  dieselbe Dichte haben? (Können Sie auch ohne a) lösen!)

c) Das Integral unter a) ist im Allgemeinen schwer analytisch zu lösen. Wenn man aber einen Zufallsgenerator für  $X$  und  $Y$  hat, kann man die Proversions-Wahrscheinlichkeit leicht aussimulieren.

Soziopsychologen haben an großen Bevölkerungsstichproben IQ-Tests durchgeführt. In einer Gruppe A ist der  $\text{IQ1} \sim N(100, 10^2)$ , in einer anderen Gruppe B  $\text{IQ2} \sim N(105, 10^2)$  (jeweils Standardabweichung = 10).

Schreiben Sie ein R-Programm, um  $\text{pr}(\text{IQ2} > \text{IQ1})$  zu bestimmen.

d) Nehmen Sie an, dass die Bevölkerungsgruppen gleich groß sind. Detlef hat  $\text{IQ}=100$  und stammt aus einer der beiden Bevölkerungsgruppen. Wie wahrscheinlich ist es, dass Detlef aus Gruppe A stammt? Egon hat  $\text{IQ}=130$  und stammt aus einer der beiden Bevölkerungsgruppen. Wie wahrscheinlich ist es, dass Detlef aus Gruppe A stammt? (Tip: Bayesformel und `dnorm` in R)

## Aufgabe 2: (Mischungsverteilung)

Sie haben zwei gezinkte Münzen (mit Kopf oder Zahl). Bei einer ist  $\text{pr}(K) = \frac{1}{4}$  bei der anderen  $\text{pr}(K)=\frac{2}{3}$ .

Ihr Zufallsexperiment besteht darin, zufällig ( $q=0.5$ ) eine Münze auszuwählen und zu werfen. Sei  $Z$  die zugehörige Zufallsvariable (d.h. Modell dieses Experiments)

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Z$ .

b) Was ist der Erwartungswert von  $Z$ ?

c) Berechnen Sie die Varianz von  $Z$ . Wie verhält sich diese zur Varianz eine Bernoulli( $E(Z)$ ) Variable?

d) Sie machen den Versuch  $N$  mal. Wie ist der Häufigkeitsschätzer für Kopf für hinreichend große  $N$  verteilt?

e)\* Zeigen Sie durch Simulation in R, dass Ihre Aussage unter d) zutrifft.

**Aufgabe 3:** In einer Schraubenfabrik werden zur Qualitätskontrolle aus der laufenden Produktion 100 Schrauben genommen und nachgemessen. 15 lagen außerhalb des Toleranzbereichs.

a) Berechnen Sie ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für die „wahre“ Ausschussrate  $p$ . Was sagt der Kunde, der sicher sein möchte, dass  $p < 20\%$  ist? Ist er zufrieden?

b) Wie viele Schrauben müsste man ungefähr ziehen, wenn man die Gesamtbreite des 95%-Konfidenzintervalls auf unter 0.1 bzw. 0.05 bringen möchte? (Rechnen Sie mit  $p=0.15$ )

Ergänzen Sie den allgemeinen Merksatz:

Doppelte Genauigkeit erfordert \_\_\_\_\_-fache Fallzahl.