
Schätzverfahren I

Dr. Dirk Hasenclever
University of Leipzig

[imise.](#)

Definition mathematische Stichprobe

Eine **mathematische Stichprobe** des Umfangs N ist gegeben durch ein N -Tupel $X_1, \dots, X_N$ von Zufallsvariablen die

- a) **unabhängig** und
- b) **identisch verteilt** sind

mit einer gemeinsamen Grundverteilung $F_X(x)$.

Parametrische Verteilung

Seien $X_1, \dots, X_N$ eine mathematische Stichprobe mit einer gemeinsamen Verteilung $F_X(x, \theta_X)$, welche in der parametrischen Familie von Verteilungsfunktionen $F_X(x, \theta)$ mit $\theta \in \Omega$ und Verteilungsdichte $f_X(x, \theta)$ liegt.

θ heißt Parameter, Ω der Parameterraum, θ_X der "wahre" zugrundeliegende Parameter.

Schätzproblem

Schätzproblem:

Gegeben die Realisierung $x_1, \dots, x_N$ einer mathematischen Stichprobe $X_1, \dots, X_N$: Wir nehmen an, dass die Grundverteilung $F_X(x, \theta_X)$ in einer parametrischen Verteilungsfamilie $F_X(x, \theta)$ liegt.

Schätze θ_X so gut wie möglich aus $x_1, \dots, x_N$!

Stichprobenfunktionen

Allgemein betrachten wir Stichprobenfunktionen

$$Y = g(X_1, \dots, X_N)$$

d.h. neue Zufallsvariable, die als Funktionen
der mathematischen Stichprobe definiert werden.

Da $X_1, \dots, X_N$ unabhängig und identisch verteilt sind,
sind insbesondere symmetrische Funktionen nützlich,
d.h. solche, die nicht von der Anordnung der X_i abhängen.

Beispiele: a) $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$

b) $\tilde{X}_N = \text{median}(X_1, \dots, X_N)$

c) $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2$

Schätzfunktionen (Schätzer, estimators)

Stichprobenfunktionen $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_1, \dots, X_N)$ $N \in \mathbb{N}$

heißen ***konsistenter Schätzer*** für θ_X ,

wenn für Realisierungen

$x_1, \dots, x_N, \dots$ und $N \rightarrow \infty$ die Folge

$\hat{\theta}_N(x_1, \dots, x_N)$ stochastisch gegen θ_X konvergiert, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{pr}(|\hat{\theta}_N(x_1, \dots, x_N) - \theta_X| > \varepsilon) = 0$$

Erwartungstreue Schätzer

Die Schätzfunktion $\hat{\theta}_n$ heißt *erwartungstreu* $\Leftrightarrow$

$$E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

Die Schätzfunktion $\hat{\theta}_n$ heißt *asymptotisch erwartungstreu* $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

Das Gesetz der großen Zahl liefert konsistente Schätzer

Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und $E(X) < \infty$ und $\text{var}(X) < \infty$.

Seien $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe d.h. unabhängig und identisch $\sim F_X$.

Der arithmetischen Mittelwert

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

ist ein konsistenter erwartungstreu Schätzer für $E(X)$.

Erwartungstreue Schätzer

Häufigkeitsschätzer

$\hat{p}_n = \frac{k}{n}$ ist ein konsistenter, erwartungstreuer Schätzer für die Wahrscheinlichkeit p , die einer Binomialverteilung zugrunde liegt.

Erwartungstreue Schätzer II

$$\hat{\sigma}_n^2(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{ist ein konsistenter}$$

aber nur asymptotisch erwartungstreu Schätzer
für die Varianz.

Beweis: Konsistenz (Gesetz der großen Zahl).

Steinerscher Verschiebungssatz:
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - (\bar{x} - \mu)^2$$

(Beweis: $-\mu + \mu$ einfügen und ausquadrieren!)

$$E(\hat{\sigma}_n^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((X_i - \mu)^2) - E((\bar{X}_n - \mu)^2)$$

$$= \frac{1}{n} n \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

(DAHER schätzt man oft mit dem erwartungstreuen $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$)

Momentenschätzer

Mit X ist natürlich auch X^r eine reelle Zufallsvariable. Falls $E(X^r)$ und $\text{var}(X^r)$ existieren, so kann man $E(X^r)$ durch das entsprechende arithmetische Mittel

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^r \text{ schätzen.}$$

Insbesondere die Varianz durch $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$.

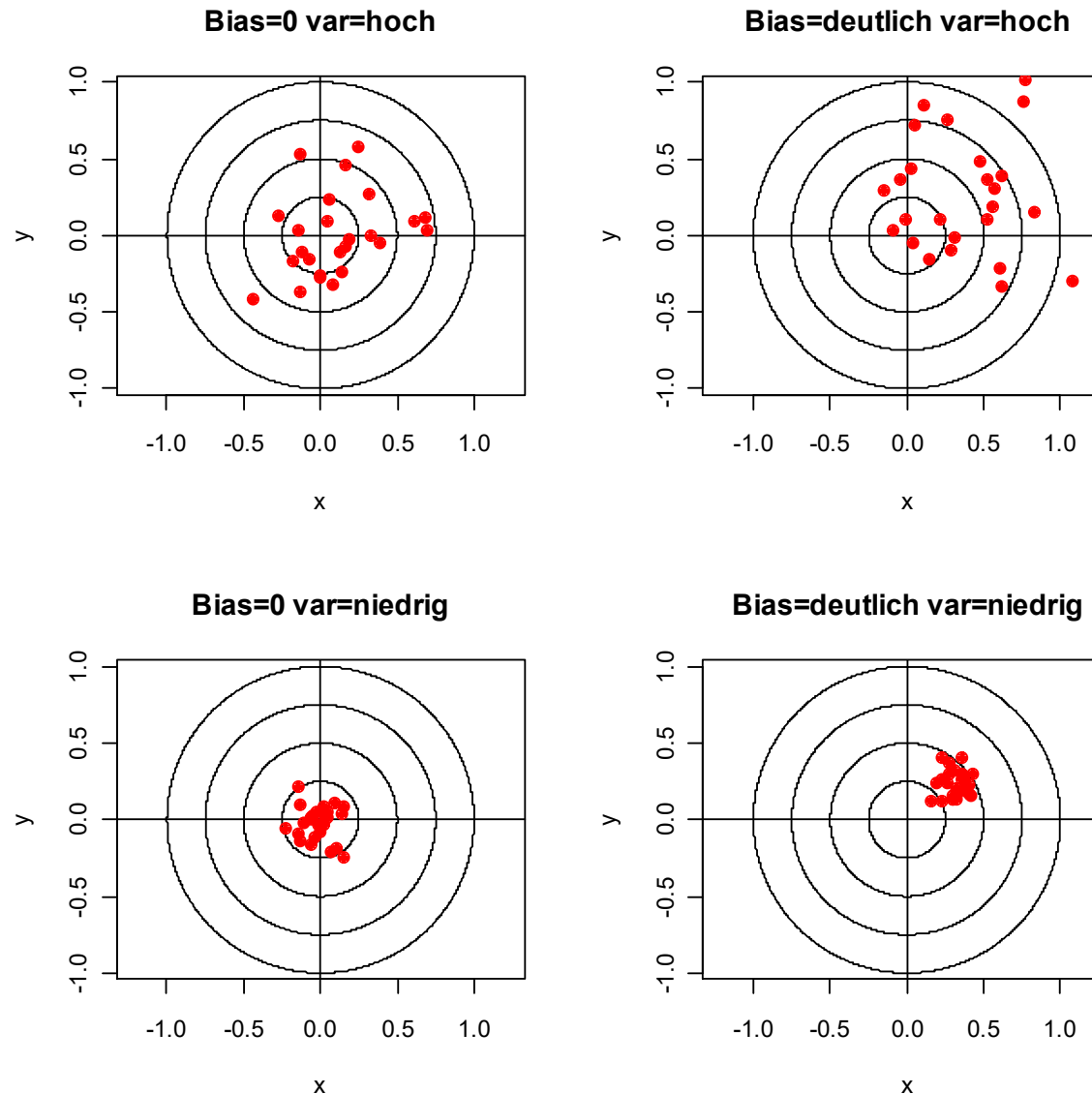
Vergleich von Schätzfunktionen

Mittlerer quadratischer Fehler (MSE = mean square error):

$$\begin{aligned} \text{MSE} &:= E\left[(\theta - \hat{\theta}_n)^2\right] = \\ &E\left[(\theta - E(\hat{\theta}_n) + E(\hat{\theta}_n) - \hat{\theta}_n)^2\right] = \\ &E\left[(\theta - E(\hat{\theta}_n))^2\right] + E\left[(E(\hat{\theta}_n) - \hat{\theta}_n)^2\right] + E\left[2 \cdot (\theta - E(\hat{\theta}_n)) \cdot (E(\hat{\theta}_n) - \hat{\theta}_n)\right] = \\ &E\left[(\theta - E(\hat{\theta}_n))^2\right] + E\left[(E(\hat{\theta}_n) - \hat{\theta}_n)^2\right] + 2 \cdot (\theta - E(\hat{\theta}_n)) E\left[(E(\hat{\theta}_n) - \hat{\theta}_n)\right] = \\ &\text{Bias}(\hat{\theta}_n)^2 + \text{var}(\hat{\theta}_n) \quad \quad \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Konstante} \end{array} \quad \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ (=0) \end{array} \end{aligned}$$

MSE = systematische Verzerrung + Zufallsstreuung

Erwarteter Fehler ist zusammengesetzt aus Bias und Streuung



MSE als Kriterium für den Vergleich von Schätzfunktionen

Kriterien:

Konventionell sucht man unter den erwartungstreuen Schätzfunktionen (d.h. $\text{Bias}(\hat{\theta}_n) = 0$) diejenige mit der kleinsten Varianz.

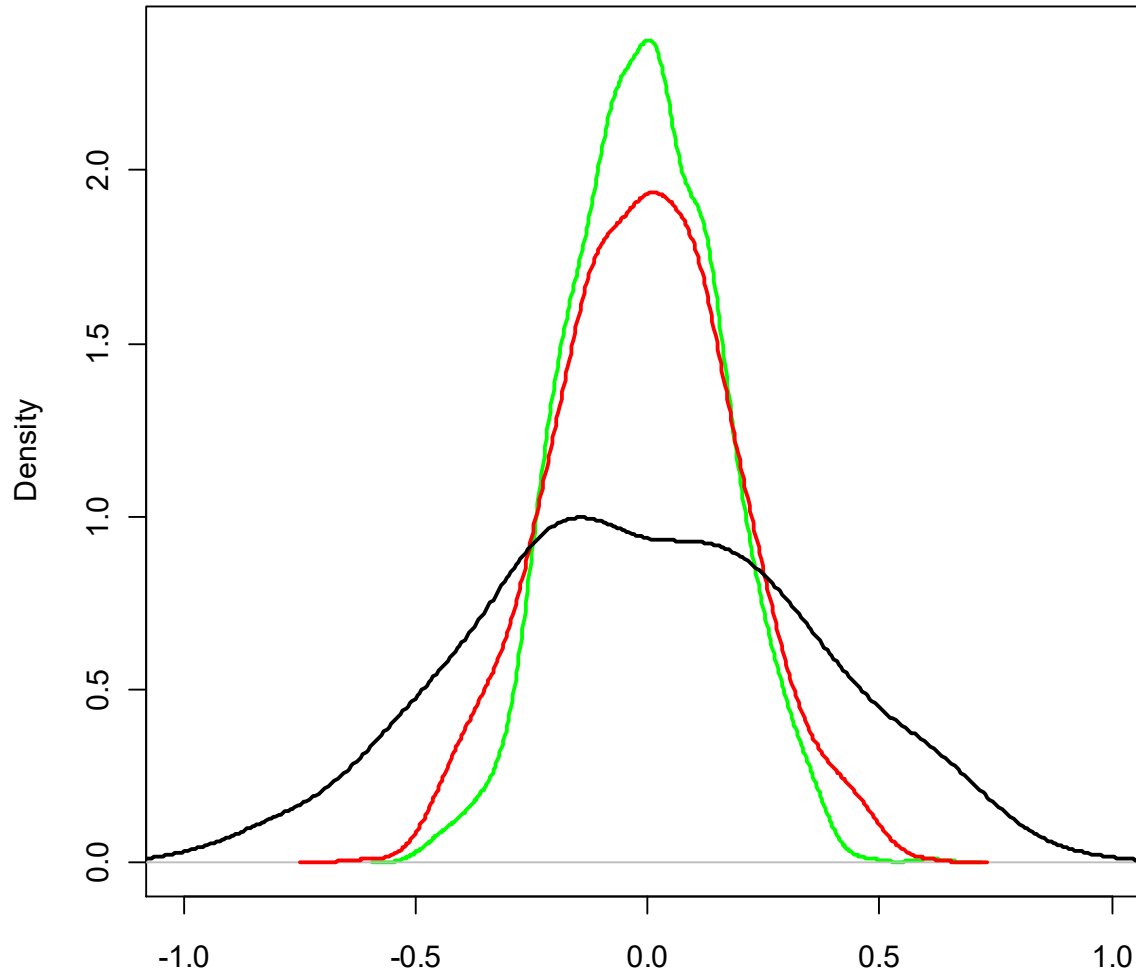
Vorsicht:

Es gibt Fälle, in denen der Schätzer mit dem geringsten mittleren quadratischen Fehler nicht einmal asymptotisch erwartungstreu ist.

Simulation aus $X \sim N(0,1)$ $N=40$

Verteilung verschiedener Schätzer für $E(X)$

Verteilung diverser Schätzfunktionen für $E(X)$



$N = 1000$ Bandwidth = 0.03636

Mittelwert

Median

Modalwert ($\text{argmax}(\text{Dichte})$)

Offenbar ist
Mittlerwertschätzer
am besten.

R-Skript auf Vorlesungsseite

Konstruktion von Schätzfunktionen

Momentenmethode

Seien X_i unabhängig und identisch - verteilte Zufallsvariable mit Verteilungsdichte $f(x, \theta)$.

Bestimme die theoretischen k - ten Momente :

$$\mu_k(\theta) := E(X^k) = \int x^k f(x, \theta) dx$$

als Funktion von θ .

Die entsprechenden empirischen k - ten Momenten sind :

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_i x_i^k$$

Durch Gleichsetzen $\mu_k(\hat{\theta}) = \hat{\mu}_k$ (für genügend viele k) entsteht ein Gleichungssystem für $\hat{\theta}$.

Durch Auflösen nach $\hat{\theta}$ ergibt sich eine Schätzfunktion (Momentenschätzer) für θ .

Konstruktion von Schätzfunktionen

Momentenmethode Beispiel

Seien $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ unabhängig und identisch normalverteilt.

$$\theta = (\mu, \sigma^2)$$

$$\mu_1(\theta) = \int x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu$$

$$\mu_2(\theta) = \int x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu^2 + \sigma^2$$

Für eine Stichprobe $x_1, \dots, x_n$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2$$

Gleichsetzen :

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \bar{x} \quad \text{arithmetisches Mittel}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_i x_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{Nicht erwartungstreuer Varianzschätzer})$$