
Übung zu Zufallsvariablen

Dr. Dirk Hasenclever
Institut für Medizinische Informatik, Statistik &
Epidemiologie (IMISE)
Zentrum für Klinische Studien Leipzig (ZKS-KKS)

dirk.hasenclever@imise.uni-leipzig.de

Kumulierte Verteilungsfunktion

- Ordinaler Träger
- $F_X(x) := \text{pr}(X \leq x)$ für alle x in Träger (X)
- Eigenschaften:
 - $F_X(\text{infimum}(\text{Träger}(X))) = 0$
 - $F_X(\text{supremum}(\text{Träger}(X))) = 1$
 - $F_X(x)$ ist monoton
 - (aber nicht zwingend streng monoton)

Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichtefunktion durch Differenzbildung bzw. Ableitung aus $F_X(x)$

- $F_X(x) = \text{pr}(X \leq x)$ für alle x in Träger (X)

- X diskret:
 - $\text{Pr}(X = x) = F_X(x) - F_X(x')$ (**Differenz** von F_X)
mit x' der Vorgänger von x

- X stetig (und F_X differenzierbar)
 - $f_X(x) = d/dx F_X(x)$ (**Ableitung** von F_X)

Eigenschaften: Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichtefunktion

- X diskret:
 - $\Pr(X = x) \geq 0$
 - **Summe** $\Pr(X = x) = 1$ über alle x im Träger(X)

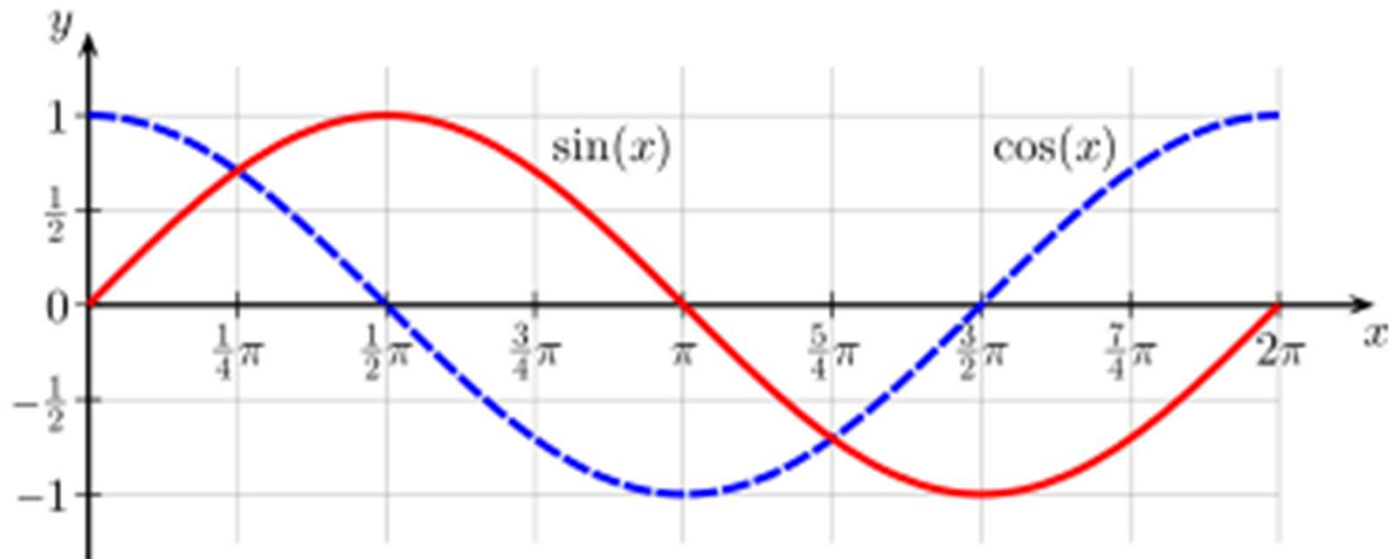
- X stetig (und F_X differenzierbar)
 - $f_X(x) \geq 0$ (da F_X monoton)
 - **Integral** $f_X(x) = 1$ über Träger(X)

Umkehrung: kumulative Verteilung aus Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichte

- Diskret:
 - $F_X(x) = \text{Summe } \text{pr}(X = y) \text{ über alle } y \leq x$
- Stetig differenzierbar:
 - $F_X(x) = \text{Integral } f_X(y) dy \text{ über alle } y \leq x$
- Kumulierte Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichte sind in einander umrechenbare, unterschiedliche Darstellungsformen.

Beispiel

- $f_X(x) = \sin(x)$ auf $[0, 2\pi]$
- Ist das eine wohldefinierte Dichtefunktion?



Ableitung [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Wird x im Bogenmaß angegeben, so gilt für die Ableitung der Sinusfunktion^[9]

$$\sin' x = \cos x$$

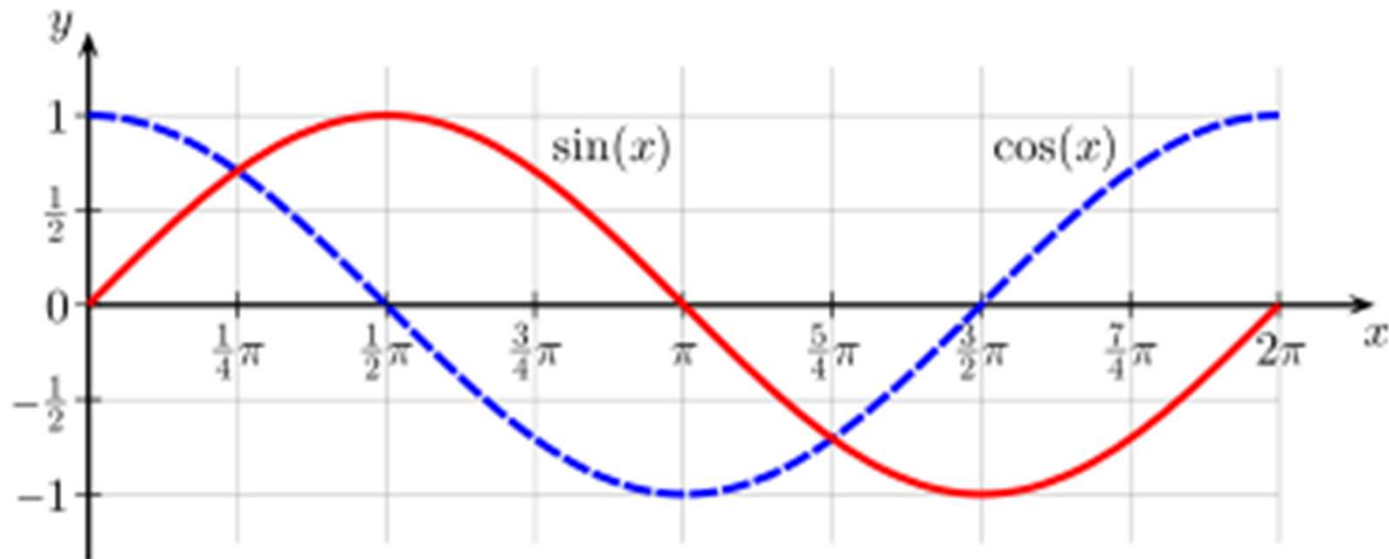
Aus $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und der Kettenregel erhält man die Ableitung des Kosinus:

$$\cos' x = -\sin x$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_und_Kosinus

Beispiel

- $f_x(x) = \sin(x)$ auf $[0, \pi]$
- Ist das eine wohldefinierte Dichtefunktion?



Ableitung [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Wird x im Bogenmaß angegeben, so gilt für die Ableitung der Sinusfunktion^[9]

$$\sin' x = \cos x$$

Aus $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und der Kettenregel erhält man die Ableitung des Kosinus:

$$\cos' x = -\sin x$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_und_Kosinus

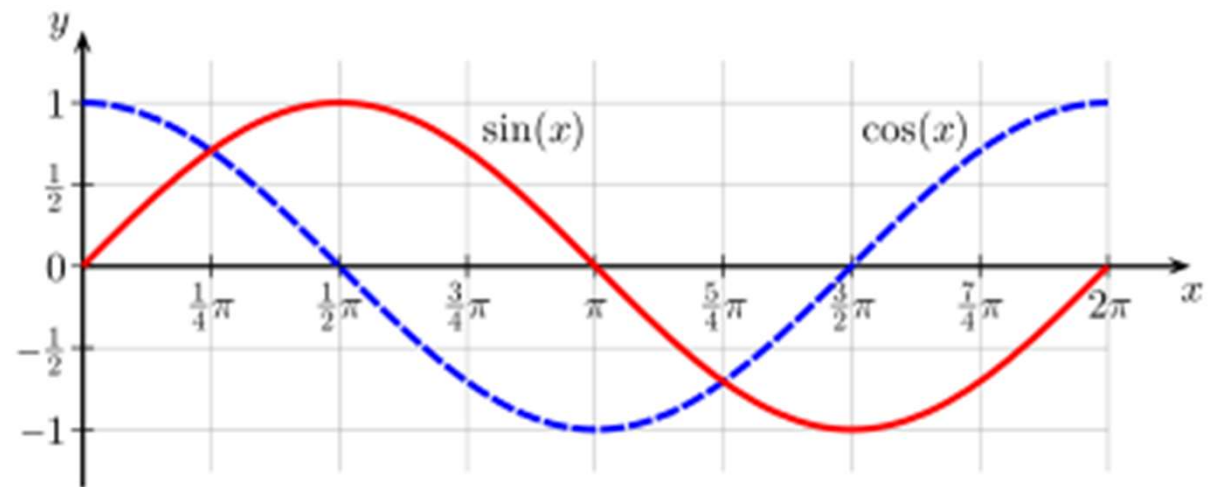
Beispiel

- $f_X(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$ auf $[0, \pi]$
 - Ist eine wohldefinierte Dichtefunktion,
 - Da Integral $f_X(x)$ über $[0, \pi] = 1$
-
- Was ist $F_X(x)$?

Beispiel

- $f_X(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$ auf $[0, \pi]$
- Ist eine wohldefinierte Dichtefunktion,
- Da $\int_0^\pi f_X(x) dx = 1$

- $F_X(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(x)]$



Was ist das für eine Verteilung?

- $F_U(u) = (u-a) / (b-a)$ auf $[a,b]$

- Aufmalen!

- Wohldefiniert?

- $f_U(u) =$

- $U \sim \text{Uniform}(a,b)$

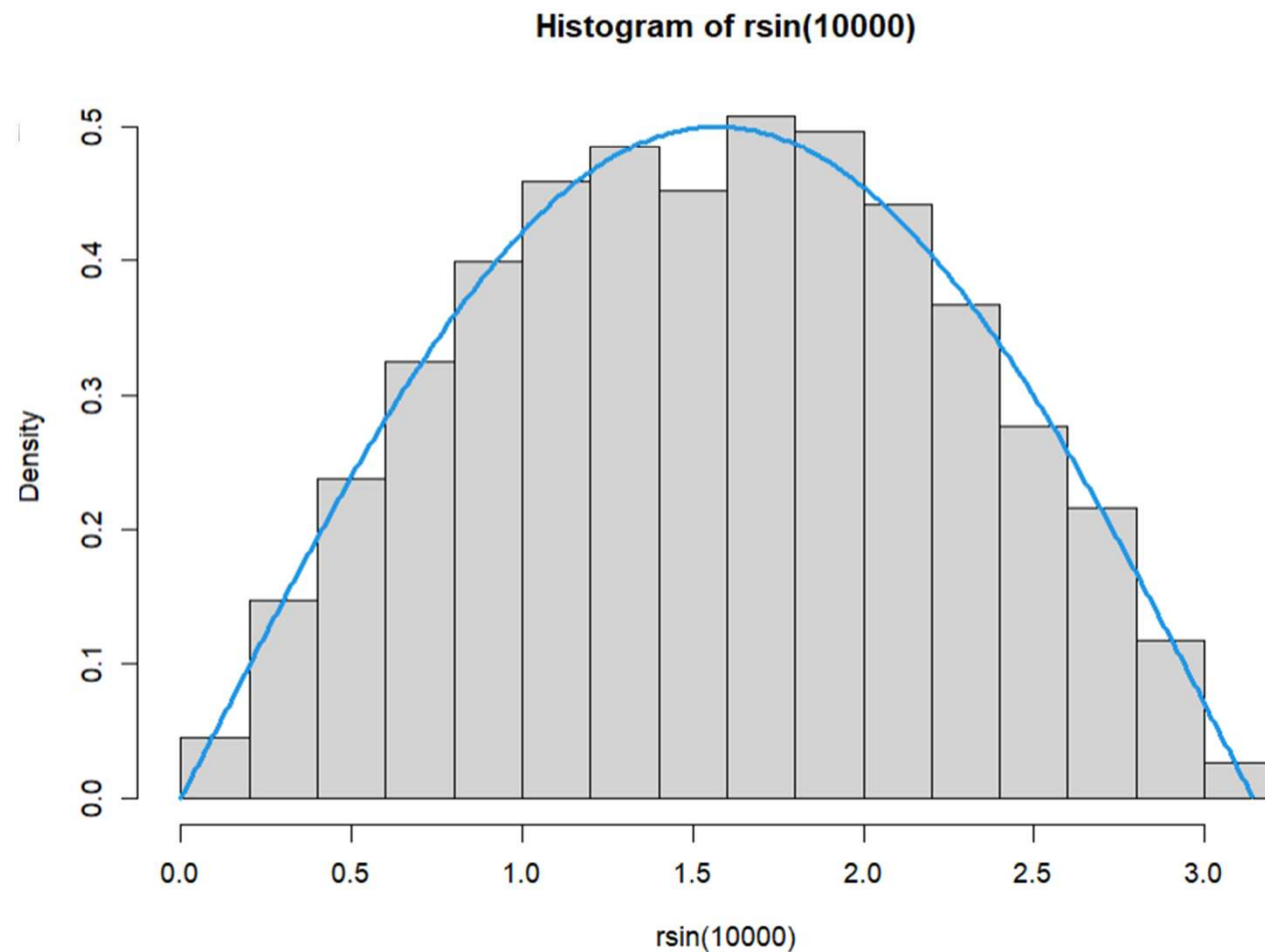
Gleichverteilung auf [0, 1]

- $U \sim \text{Uniform}(0,1)$
- $F_X(x)$ gegebene Verteilungsfunktion
- Angenommen Umkehrfunktion $F_X^{-1}(q)$ existiere.
- Dann gilt $X = F_X^{-1}(U)$
- Rezept, um aus einem Zufallsgenerator für U Zufallsgeneratoren für X zu bauen.

```

1
2 # Gleichverteilung auf [0,1]
3
4 hist(runif(100))
5 hist(runif(10000))
6 hist(runif(10000,10,14))
7
8
9 # Zufallsgenerator für
10 #  $f_X(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$  auf  $[0, \pi]$ 
11
12 # Dichtefunktion
13 dsin <- function(x){ sin(x)/2 }
14 plot(dsin, xlim=c(0,pi))
15
16 # Verteilungsfunktion
17 psin <- function(x){ (1-cos(x))/2 }
18 plot(psin, xlim=c(0,pi))
19
20 # Inverse Verteilungsfunktion
21 #  $q = (1-\cos(x))/2 \Rightarrow$ 
22 #  $\cos(x) = 1-2*q \Rightarrow$ 
23 #  $x = \arccos(1-2*q)$ 
24 qsin <- function(q) { acos(1-2*q) }
25 qsin(psin(.6))
26 plot(qsin, xlim=c(0,1))
27
28 # Zufallsgenerator
29 rsin<-function(N){ qsin(runif(N)) }
30
31 hist(rsin(10000), probability = T)
32 gg<- 0:(pi*100)/100
33 lines(gg, dsin(gg), col=4, lwd=3)
34

```



Allgemein in R

- Zufallsvariable und –generatoren am Beispiel der Normalverteilung
- **d**norm Dichte
- **p**norm Verteilungsfunktion
- **q**norm Inverse Verteilungsfunktion
- **r**norm Zufallsgenerator